

## 基于变换基阵的三维 SDCT 表示方法

孙文邦<sup>1</sup>, 唐海燕<sup>2</sup>, 孙文斌<sup>3</sup>, 程红<sup>1</sup>

(1. 空军航空大学 特种专业系, 吉林 长春 130022; 2. 空军航空大学 航空理论系, 吉林 长春 130022; 3. 安徽工业大学 数理学院, 安徽 马鞍山 243002)

**摘要:** 对三维 SDCT (sub-matrices discrete cosine transform) 表示方法进行了研究。首先, 定义了 4 种新的三维矩阵运算方法; 其次, 在构建了变换基阵的基础上, 详细描述了三维 SDCT 的运算原理; 最后, 对三维 SDCT 算法特性进行了分析。通过理论分析表明, 三维 SDCT 运算方法使三维 DCT 的表达简洁, 理解容易, 计算便捷。

**关键词:** SDCT; 变换基阵; 运算特性; 表示方法

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2012)04-0163-06

## Expression method of 3-D SDCT based on transform basic matrix

SUN Wen-bang<sup>1</sup>, TANG Hai-yan<sup>2</sup>, SUN Wen-bin<sup>3</sup>, CHENG Hong<sup>1</sup>

(1. Aviation University of Air Force, Aviation Information Dep., Changchun 130022, China;

2. Aviation University of Air Force, Aviation Theory Dep., Changchun 130022, China;

3. School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002, China)

**Abstract:** The expression method of 3-D SDCT (sub-matrices discrete cosine transform) was studied. First, four 3-D matrix operation principles were defined. Then, the transform basic matrix used for 3-D SDCT operation was build and the operation principle of 3-D SDCT was described in detail. Finally, the performance of 3-D SDCT was analyzed. The theoretical analysis shows that the proposed method makes 3-D DCT succinct to express, easy to comprehend and convenient to operate.

**Key words:** SDCT; transform basic matrix; operation performance; expression method

### 1 引言

随着信息处理技术的发展, 三维 DCT 广泛应用于各领域, 针对三维 DCT 算法本身的研究也较多。例如, Raymond 和 Furht 等较早地将三维 DCT 应用到视频压缩领域<sup>[1]</sup>。陈贺新等在三维 DCT 算法基础上提出了多维矩阵理论, 并在图像压缩和视频压缩领域得到了应用<sup>[2~5]</sup>。近年来, 三维 DCT 还被应用到其他领域, 例如全方向的积分图像压缩编码<sup>[6]</sup>、多视角立体图像编码<sup>[7]</sup>和视频水印<sup>[8]</sup>等领域。

然而, 目前三维 DCT 运算一般都是对三维数

据矩阵中的 3 个维度分别进行一维 DCT 来完成, 这种运算方法不能很好地体现三维变换的整体空间特性。因此, 本文提出了一种三维立体矩阵意义下的 SDCT 运算方法, 使三维 DCT 表达简洁, 计算灵活, 理解容易。

### 2 三维矩阵表示与运算

为了描述方便, 定义三维矩阵的表示形式和 4 种三维矩阵的运算方法。

#### 2.1 三维矩阵的表示

由  $R \times C \times T$  个数  $a_{rct}$  ( $r=1,2,\dots,R$ ;  $c=1,2,\dots,C$ ;

收稿日期: 2010-12-28; 修回日期: 2011-10-22

基金项目: 国家自然科学基金国际合作基金资助项目(609111301281); 国家自然科学基金资助项目(60832002); 吉林省科技发展计划基金资助项目(20090302)

**Foundation Items:** Projects of International Cooperation and Exchanges NSFC (609111301281); The National Natural Science Foundation of China (60832002); The Scientific and Technological Development Plan Project of Jilin Province (20090302)

$t=1,2,\dots,T$ ) 构成  $R$  行,  $C$  列,  $T$  页的三维立方体数据排列称大小为  $R \times C \times T$  的三维矩阵, 简称  $R \times C \times T$  阶三维矩阵, 或  $R \times C \times T$  三维矩阵。为了表示一个整体, 采用斜粗体字母  $A, B$  等或缩写  $[a_{rct}]$ 、 $[b_{rct}]$  等表示三维矩阵。其中,  $r, c$  和  $t$  分别表示矩阵元素在矩阵中的行数、列数和页数, 即表示矩阵元素在矩阵中的位置。当需要说明三维矩阵大小时, 采用  $A_{R \times C \times T}$  或  $[a_{rct}]_{R \times C \times T}$  表示。

例如, 一个  $4 \times 4 \times 4$  三维矩阵, 可以表示为  $A_{4 \times 4 \times 4}$ , 如式(1)所示。

$$A_{4 \times 4 \times 4} = \begin{matrix} & & & a_{114} & a_{124} & a_{134} & a_{144} \\ & & & a_{113} & a_{123} & a_{133} & a_{143} & a_{244} \\ & & & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{142} & a_{243} & a_{344} \\ a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{141} & a_{242} & a_{343} & a_{444} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{241} & a_{342} & a_{443} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{341} & a_{442} \\ a_{411} & a_{421} & a_{431} & a_{441} \end{matrix} \quad (1)$$

一个较大矩阵可以拆分为若干子块来表示。以子块为“元素”形式的矩阵称为分块矩阵。分块矩阵的子块可采取  $A_{rct, R \times C \times T}$  来表示, 其中,  $R \times C \times T$  表示子块的大小,  $r, c$  和  $t$  分别为子块在原矩阵中位置。子块中某一元素可表示为  $a_{ijk, rct}$ , 其中,  $r, c$  和  $t$  同样表示子块在原矩阵中位置,  $i, j$  和  $k$  表示子块元素在子矩阵中位置。例如, 如将式(1)拆分为 8 个  $2 \times 2 \times 2$  的子块, 则可采用式(2)来表示。

$$A_{4 \times 4 \times 4} = \begin{matrix} & & A_{112, 2 \times 2 \times 2} & A_{122, 2 \times 2 \times 2} \\ & & A_{212, 2 \times 2 \times 2} & A_{222, 2 \times 2 \times 2} \\ A_{111, 2 \times 2 \times 2} & A_{121, 2 \times 2 \times 2} & & \\ A_{211, 2 \times 2 \times 2} & A_{221, 2 \times 2 \times 2} & & \end{matrix} \quad (2)$$

### 2.2 三维矩阵的运算

**定义 1** 设有一个三维矩阵  $A=(a_{rct,ijk})$ , 其中  $r=1,2,\dots,R, c=1,2,\dots,C, t=0,1,\dots,T, i=1,2,\dots,I, j=1,2,\dots,J, k=1,2,\dots,K$ 。那么矩阵  $A$  的“置位”运算记为  $A^L$ , 规定

$$A^L = (a_{ijk, rct}) \quad (3)$$

**定义 2** 设有 2 个三维矩阵  $A=(a_{rct}), B=(b_{rct})$ , 其中,  $r=1,2,\dots,R, c=1,2,\dots,C, t=0,1,\dots,T$ , 矩阵  $A$  和  $B$  的“和积”运算记为  $A \nabla B$ , 规定

$$A \nabla B = \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C \sum_{t=1}^T a_{rct} b_{rct} \quad (4)$$

**定义 3** 设有 2 个矩阵  $A=(a_{rct})$  和  $B=(b_{rct,ijk})$ , 其中,  $r=1,2,\dots,R, c=1,2,\dots,C, t=0,1,\dots,T, i=1,2,\dots,I,$

$j=1,2,\dots,J, k=1,2,\dots,K$ 。矩阵  $A$  和  $B$  的“块积”记为  $A \triangleright B$ , 规定“块积”结果是一个  $C_I \times J \times K$  矩阵。

$$A \triangleright B = A \triangleright \begin{matrix} & & & B_{11K} & B_{12K} & \dots & B_{1JK} \\ & & & B_{21K} & B_{22K} & \dots & B_{2JK} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & B_{112} & B_{122} & \dots & B_{1J2} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{111} & B_{121} & \dots & B_{1J1} & B_{2J2} & \dots & B_{LJK} \\ B_{211} & B_{221} & \dots & B_{2J1} & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & B_{LJ2} & & \\ B_{J11} & B_{J21} & \dots & B_{LJ1} & & & \end{matrix} = \begin{matrix} & & & A \nabla B_{11K} & A \nabla B_{12K} & \dots & A \nabla B_{1JK} \\ & & & A \nabla B_{21K} & A \nabla B_{22K} & \dots & A \nabla B_{2JK} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & A \nabla B_{112} & A \nabla B_{122} & \dots & A \nabla B_{1J2} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A \nabla B_{111} & A \nabla B_{121} & \dots & A \nabla B_{1J1} & B_{2J2} & \dots & A \nabla B_{LJK} \\ A \nabla B_{211} & A \nabla B_{221} & \dots & A \nabla B_{2J1} & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & B_{LJ2} & & \\ A \nabla B_{J11} & A \nabla B_{J21} & \dots & A \nabla B_{LJ1} & & & \end{matrix} \quad (5)$$

结果  $C_I \times J \times K$  矩阵中任意一个元素为

$$C_{ijk} = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} \sum_{t=0}^{T-1} a_{rct} b_{rct,ijk}$$

矩阵“块积”运算满足以下运算规律(设  $A, B$  为  $R \times C \times T$  矩阵,  $C$  为  $(IR) \times (JC) \times (KT)$  矩阵):

$$(A+B) \triangleright C = A \triangleright C + B \triangleright C$$

**定义 4** 设有 2 个矩阵  $A=(a_{rct})$  和  $B=(b_{ijk, rct})$ , 其中,  $r=1,2,\dots,R, c=1,2,\dots,C, t=0,1,\dots,T, i=1,2,\dots,I, j=1,2,\dots,J, k=1,2,\dots,K$ 。矩阵  $A$  和  $B$  的“叠积”记为  $A \triangleleft B$ , 规定“叠积”结果是一个  $C_I \times J \times K$  矩阵。

$$A_{R \times C \times T} \triangleleft B_{(IR) \times (JC) \times (KT)} =$$

$$A_{R \times C \times T} \triangleleft \begin{matrix} & & & B_{11T} & B_{12T} & \dots & B_{1CT} \\ & & & B_{21T} & B_{22T} & \dots & B_{2CT} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & B_{112} & B_{122} & \dots & B_{1C2} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{111} & B_{121} & \dots & B_{1C1} & B_{2C2} & \dots & B_{RC2} \\ B_{211} & B_{221} & \dots & B_{2C1} & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & B_{RC2} & & \\ B_{R11} & B_{R21} & \dots & B_{RC1} & & & \end{matrix} = \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C \sum_{t=1}^T a_{rct} B_{rct, I \times J \times K} = C_{I \times J \times K} \quad (6)$$

矩阵“叠积”运算满足以下运算规律(设  $A, B$  为  $R \times C \times T$  矩阵,  $C$  为  $(IR) \times (JC) \times (KT)$  矩阵):

$$(A+B) \triangleleft C = A \triangleleft C + B \triangleleft C$$

### 3 三维 DCT 算法

设有一个三维信号序列为  $f(r,c,t)$ , 其中,  $r=0,1,\dots, R-1, c=0,1,\dots, C-1, t=0,1,\dots, T-1$ , 三维 DCT 为

$$F(u, v, \omega) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sqrt{\frac{2}{C}} \sqrt{\frac{2}{T}} c(u)c(v)c(\omega) \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} \sum_{t=0}^{T-1} f(r, c, t) \cos \left[ \frac{\pi(2r+1)u}{2R} \right] \cos \left[ \frac{\pi(2c+1)v}{2C} \right] \cos \left[ \frac{\pi(2t+1)\omega}{2T} \right]$$

$$u = 0, 1, \dots, R-1, v = 0, 1, \dots, C-1, \omega = 0, 1, \dots, T-1 \quad (7)$$

三维 DCT 逆变换为

$$f(r, c, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sqrt{\frac{2}{C}} \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{u=0}^{R-1} \sum_{v=0}^{C-1} \sum_{\omega=0}^{T-1} F(u, v, \omega) c(u)c(v)c(\omega) \cos \left[ \frac{\pi(2r+1)u}{2R} \right] \cos \left[ \frac{\pi(2c+1)v}{2C} \right] \cos \left[ \frac{\pi(2t+1)\omega}{2T} \right] \quad (8)$$

式中

$$c(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u=0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases}, \quad c(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & v=0 \\ 1 & v \neq 0 \end{cases}, \quad c(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega=0 \\ 1 & \omega \neq 0 \end{cases}$$

式(7)和式(8)表示的三维 DCT 正变换与逆变换表达式，还可以分别写成式(9)和式(10)表示的可分离形式。

$$F(u, c, \omega) = \sqrt{\frac{2}{R}} c(\omega) \sum_{t=0}^{T-1} \left( \sqrt{\frac{2}{C}} c(v) \sum_{c=0}^{C-1} \left( \sqrt{\frac{2}{T}} c(u) \sum_{r=0}^{R-1} f(r, c, t) \cos \left[ \frac{(2r+1)\pi u}{2R} \right] \right) \cos \left[ \frac{(2c+1)\pi v}{2C} \right] \right) \cos \left[ \frac{(2t+1)\pi \omega}{2T} \right] \quad (9)$$

$$f(r, c, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{u=0}^{R-1} \left( \sqrt{\frac{2}{C}} \sum_{v=0}^{C-1} \left( \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{\omega=0}^{T-1} F(u, v, \omega) c(u) \cos \left[ \frac{(2r+1)\pi u}{2R} \right] \right) c(v) \cos \left[ \frac{(2c+1)\pi v}{2C} \right] \right) c(\omega) \cos \left[ \frac{(2t+1)\pi \omega}{2T} \right] \quad (10)$$

三维 DCT 可分离形式说明，可连续运用 3 次一维 DCT 来实现三维 DCT。这种运算方式实质上是对三维信号逐点进行运算，称为串行运算。

由于三维 DCT 的矩阵表示比较困难，一般参考文献都没有给出矩阵表示形式。文献[3]根据三维 DCT 可分离性，按照分别对三维矩阵的行、列、页进行一维 DCT 操作，给出了如下三维 DCT 矩阵表达式

$$\begin{cases} \mathbf{F} = (\mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_2 (\mathbf{C}_1 \mathbf{f} \mathbf{C}_1^T) \mathbf{C}_2^T) \mathbf{C}_3^T)_{\text{III}} \\ \mathbf{f} = (\mathbf{C}_2^T (\mathbf{C}_3^T (\mathbf{C}_1^T \mathbf{F} \mathbf{C}_1) \mathbf{C}_2) \mathbf{C}_3)_{\text{III}} \end{cases} \quad (11)$$

式中， $\mathbf{f}$  为原始的三维数据， $\mathbf{F}$  为变换结果系数。 $\mathbf{C}_1$ 、 $\mathbf{C}_2$  和  $\mathbf{C}_3$  分别是文献中定义的，类似于二维 DCT 的转换矩阵。I、II 和 III 分别表示是对行、列和页进行变换。

这种表达方式虽然是采用了矩阵形式进行表述，但是表述比较繁琐，实质上还是串行运算方法的思想。

### 4 三维 SDCT 算法

设矩阵  $\mathbf{P}$  为

$$\mathbf{P}_{R^2 \times C^2 \times T^2} = \begin{matrix} & & & & \mathbf{Q}_{11T} & \mathbf{Q}_{12T} & \dots & \mathbf{Q}_{1CT} \\ & & & & \mathbf{Q}_{21T} & \mathbf{Q}_{22T} & \dots & \mathbf{Q}_{2CT} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{Q}_{112} & \mathbf{Q}_{122} & \dots & \mathbf{Q}_{1C2} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{111} & \mathbf{Q}_{121} & \dots & \mathbf{Q}_{1C1} & \mathbf{Q}_{211} & \mathbf{Q}_{221} & \dots & \mathbf{Q}_{2C1} \\ \mathbf{Q}_{211} & \mathbf{Q}_{221} & \dots & \mathbf{Q}_{2C1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{R11} & \mathbf{Q}_{R21} & \dots & \mathbf{Q}_{RC1} & \mathbf{Q}_{R12} & \mathbf{Q}_{R22} & \dots & \mathbf{Q}_{RC2} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{Q}_{R11} & \mathbf{Q}_{R21} & \dots & \mathbf{Q}_{RC1} \end{matrix} \quad (12)$$

其中，

$$\mathbf{Q}_{(r+1)(c+1)(t+1), R \times C \times T} = \begin{matrix} & & & & \mathbf{Q}_{(0,0,T-1,r,c,t)} & \dots & \mathbf{Q}_{(0,C-1,T-1,r,c,t)} \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{Q}_{(0,0,2,r,c,t)} & \dots & \mathbf{Q}_{(0,C-1,2,r,c,t)} \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{(0,0,0,r,c,t)} & \dots & \mathbf{Q}_{(0,C-1,0,r,c,t)} & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ \mathbf{Q}_{(R-1,0,0,r,c,t)} & \dots & \mathbf{Q}_{(R-1,C-1,0,r,c,t)} & & & & \end{matrix}$$

$$\mathbf{Q}(u, v, \omega, r, c, t) = \sqrt{\frac{2}{R}} c(u) \cos \left[ \frac{\pi(2r+1)u}{2R} \right] \sqrt{\frac{2}{C}} c(v) \cos \left[ \frac{\pi(2c+1)v}{2C} \right] \sqrt{\frac{2}{T}} c(\omega) \cos \left[ \frac{\pi(2t+1)\omega}{2T} \right]$$

其中， $\mathbf{Q}(u, v, \omega, r, c, t)$  称为三维 SDCT 的变换核， $\mathbf{Q}_{(r+1)(c+1)(t+1), R \times C \times T}$  称为三维 SDCT 的基信号（基矩阵）， $\mathbf{P}$  称为三维 SDCT 的变换基阵。

如果三维信号大小为  $8 \times 8 \times 8$ ，则变换基阵的基信号共有  $8 \times 8 \times 8$  个，其空间结构分布如图 1 所示。图 1 中每一个小立方体代表三维 SDCT 的一个基信号。

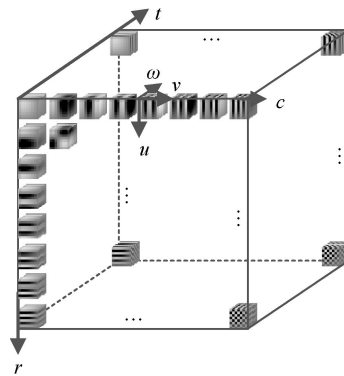


图 1 信号大小为  $8 \times 8 \times 8$  时的变换基阵

注：为了形象地描述，把变换基阵值域范围调整到[0,255]，以提高可视效果。

其中部分基信号如图 2 所示。图 2 从左到右、从上到下依次是变换基阵中空间频率为(0,0,0) (1,1,1) (2,2,2) (3,3,3) (4,4,4) (5,5,5) (6,6,6) (7,7,7)位置上的基信号，按照 8 页展开（8 页按照从左到右，从上到下进行排序）。

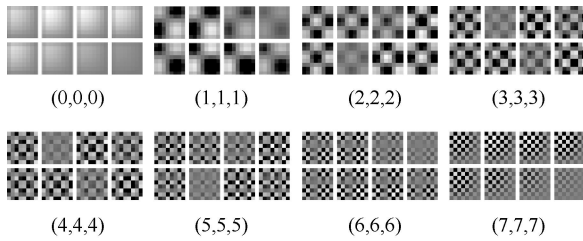


图 2 变换基阵的部分基信号展开

采用变换核和变换基信号可以将三维 DCT 表达式(7)和式(8)可改写成式(13)和式(14)。

$$\begin{aligned}
 [F(u, v, \omega)]_{l \times l} &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} \sum_{t=0}^{T-1} f(r, c, t) Q(u, v, \omega, r, c, t) \\
 &= \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} \sum_{t=0}^{T-1} f(r, c, t) Q_{(u+1)(v+1)(\omega+1), (r+1)(c+1)(t+1)}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 [f(r, c, t)]_{l \times l} &= \sum_{u=0}^{R-1} \sum_{v=0}^{C-1} \sum_{\omega=0}^{T-1} F(u, v, \omega) Q(u, v, \omega, r, c, t) \\
 &= \mathbf{F} \triangleright \mathbf{Q}_{(r+1)(c+1)(t+1), R \times C \times T}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

根据变换基阵的定义，式(13)和式(14)可进一步简化成

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \triangleleft \mathbf{P} \tag{15}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \triangleright \mathbf{P} \tag{16}$$

从式(15)可以看出，三维信号  $\mathbf{f}$  中  $R \times C \times T$  个元素与变换基阵中  $R \times C \times T$  个对应基信号乘积后，再将所有乘积后的基信号叠加起来就得到三维 DCT 变换结果矩阵。

从式(16)可以看出，变换结果  $\mathbf{F}$  与变换基阵的某一位置上基矩阵（基信号）的“和积”运算得到对应位置上的逆变换结果。如果变换结果  $\mathbf{F}$  与变换基阵  $\mathbf{P}$  中  $R \times C \times T$  个基矩阵分别“和积”，得到最终的逆变换结果  $\mathbf{f}$ ，就完成了三维 DCT 的逆运算。

基于变换基阵的三维 SDCT 总体运算过程如图 3 所示。

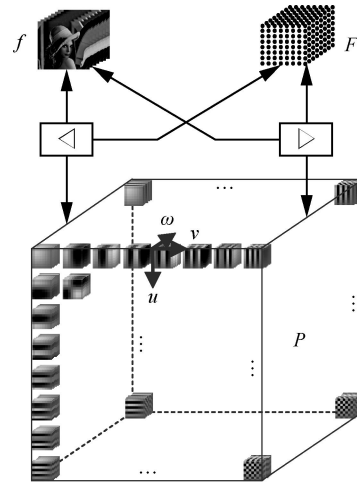


图 3 基于变换基阵的三维 SDCT 运算过程

### 5 三维 SDCT 算法特性分析

通过三维 SDCT 可以很方便地对三维 DCT 运算性能进行分析，主要有以下几个特性。

#### 5.1 表述特性

比较式(7)、式(8)、式(11)、式(15)和式(16)可以看出，三维 SDCT 正变换和逆变换都具有数学意义上的简洁统一的矩阵表述形式，很好地解决了三维 DCT 不易采用矩阵表述的难题。

#### 5.2 基信号特性

从式(15)可以看出，三维 DCT 正变换是由三维信号  $\mathbf{f}$  与变换基阵  $\mathbf{P}$  的“叠积”来完成。由矩阵的“置位”、“块积”和“叠积”运算的定义，式(15)还可以采用“块积”运算来表示

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \triangleright \mathbf{P}^L \tag{17}$$

同理式(16)也可以采用“叠积”运算来表示

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \triangleleft \mathbf{P}^L \tag{18}$$

由式(15)~式(18)可以看出，SDCT 算法突出的思想是利用了变换基阵的概念，将三维信号与变换基阵中的基信号建立起了联系。

#### 5.3 计算特性

根据“和积”运算的定义可以看出，“和积”运算实质上可以认为是“互相关”运算。而“块积”运算中运用大量的“和积”运算，所以“块积”运算也可以认为是由互相关运算组成。

从式(17)可以看出，三维信号  $\mathbf{f}$  与变换基阵置位矩阵中某一位置上的基矩阵（基信号）“和积”运算得到对应位置上的变换结果。所以，某一空间频率成份的计算只需要三维信号  $\mathbf{f}$  与对应位置上的

基信号运算，而和其他位置上的基信号无关。这样就可以采用“和积”单独计算某一空间频率。从式(16)可以看出，采用“和积”也可以单独计算某一空间位置上的逆变换值。

“叠积”运算实际上可以认为是对三维信号的分解。式(15)表示的变换结果  $F$  可以看成三维信号  $R \times C \times T$  个元素与变换基阵  $R \times C \times T$  个基信号加权和，如下式所示。

$$F = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} \sum_{t=0}^{T-1} f_{(r+1)(c+1)(t+1)} Q_{(r+1)(c+1)(t+1)}$$

或

$$F = f_{111} + f_{211} + f_{311} + f_{411} + \dots + f_{888}$$

通过“叠积”运算可以一次性整体完成三维 DCT 的运算。

同时，根据式(18)表示的变换结果  $F$  与变换基阵的置位矩阵“叠积”运算关系，三维信号  $f$  可以看成是变换结果和变换基阵的置位矩阵中基信号的加权和，如下式表示。

$$f = \sum_{u=0}^{R-1} \sum_{v=0}^{C-1} \sum_{\omega=0}^{T-1} F_{(u+1)(v+1)(\omega+1)} Q_{(u+1)(v+1)(\omega+1)}$$

或

$$f = F_{111} + F_{211} + F_{311} + F_{411} + \dots + F_{888}$$

式中， $Q_{(u+1)(v+1)(\omega+1)}$  为变换基阵的置位矩阵中的基信号。通过“叠积”运算也可以一次性整体完成三维 DCT 的逆运算。

所以，三维 SDCT 正变换和逆变换中采用“块积”可以方便地单独计算某一空间频率值或空间位置的恢复值；采用“叠积”运算可以一次性整体完成三维 DCT 正变换或三维 DCT 逆运算。采用三维 SDCT 算法不论是计算频域或空域单个值还是计算整体值都比较便捷。

另外，三维 SDCT 中“块积”运算与互相关性有关，“叠积”运算与基信号分解有关，都具有好的物理含义，对三维 DCT 的理解比较方便。

### 5.4 变化信息扩散特性

不失一般性，以一点的变化信息来说明。如果三维信号  $f$  中  $(i,j,k)$  处发生变化，设变化量为  $\varepsilon$ ，则

$$(f + \varepsilon) \triangleleft P = f \triangleleft P + \varepsilon \triangleleft P = F + \varepsilon Q_{ijk}$$

变换基阵中每一个基信号都是有多个非零值元素的矩阵，同样  $\varepsilon Q_{ijk}$  也是一个有多个非零值元素

的矩阵。所以三维信号  $f$  空域变化一处，则在频域变化多处。同理，也可以得到频域中变换一处信息，逆变换过程中，扩散到空域中多处。

采用变化信息扩散性可以方便地分析三维 DCT 实际应用效果。例如：基于 DCT 视频压缩<sup>[9,10]</sup>中引起的方块效应分析。由于视频序列是由行 ( $r$ ) 和列 ( $c$ ) 组成一帧，再在时间 ( $t$ ) 轴上许多帧组成，可以将视频数据（只考虑亮度分量）按照行、列、时间 3 个维度构成三维矩阵的形式来表示，如图 4 所示。这时三维矩阵中的元素值即为视频图像的灰度值，三维矩阵可称为灰度立方体。

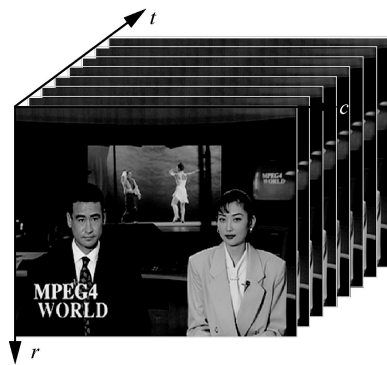


图4 视频图像亮度信息的三维矩阵表示

视频压缩应用中一般将灰度立方体划分成  $8 \times 8 \times 8$  宏块<sup>[9]</sup>，再对宏块进行三维 DCT。三维变换结果一般都需要进行量化处理，而量化处理就会造成变换结果的信息改变。在量化信号在逆变换过程中，将变换结果的变化信息扩散到空域中多处。特别是逆变换后 2 个相邻宏块边缘处，由于信息的扩散性，灰度值产生较大的差异，因此在 2 个相邻宏块边缘处会产生方块效应。

## 6 结束语

本文根据三维 DCT 运算特点，定义了 4 种三维矩阵运算的新方法和变换基阵，在此基础上提出了三维 SDCT 运算方法。SDCT 的正变换和逆变换都具有统一的矩阵表述形式以及相关运算、信号分解特性的良好物理含义。通过三维 SDCT 运算，还可以方便地对三维 DCT 运算相关的特性进行分析。

### 参考文献：

- [1] RAYMOND W, FURHT B. The XYZ algorithm for real-time compression of full-motion video[J]. Real-time Imaging, 1996,2:19-34.
- [2] 朱艳秋, 陈贺新, 戴逸松. 彩色图像三维矩阵变换压缩编码[J]. 电子

- 学报, 1997, 25(7):16-21.
- ZHU Y Q, CHEN H X, DAI Y S, Compression coding of color image via 3-D matrix transform[J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(7):16-21.
- [3] 桑爱军, 陈贺新. 三维矩阵彩色图像 WDCT 压缩编码[J]. 电子学报, 2002, 30(4):594-597.
- SANG A J, CHEN H X. 3D-matrix WDCT compression coding for color image[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(4):594-597.
- [4] 刘韶, 桑爱军, 陈贺新等. 基于 YC 子阵的彩色图像三维矩阵变换压缩编码[J]. 吉林大学学报 (工学版), 2006, 36(4):569-573.
- LIU S, SANG A J, CHEN H X, *et al.* 3D matrix transform compression coding of color image based on YC submatrix[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2006, 36(4): 569-573.
- [5] CHEN Q, CHEN, SANG H X, A J, *et al.* Enabling color image compression by 3-D submatrix integration transform in MPEG-21[A]. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Information Acquisition[C]. 2006. 262-267.
- [6] AQQOUN A. A 3D DCT compression algorithm for omnidirectional integral images[A]. Proceedings of ICASSP[C]. 2006. 517-520.
- [7] SQOUROS N P, ATHINEOS S S, MARDAKI P E, *et al.* Use of an adaptive 3D-DCT scheme for coding multiview stereo images[A]. Proceedings of the Fifth IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology[C]. 2005.180-185.
- [8] YANG J, HU J P, LIU P. Video watermarking by 3-D DCT[A]. Proceedings of the 7th International Conference on Signal Processing[C]. 2004. 861-864.
- [9] LIU L L, CHEN H X, SANG A J, *et al.* 4-D order-4 vector matrix DCT integer transform and its application in video code[J]. The Imaging Science Journal, 2010.58(6): 321-330.
- [10] SANG A J, CHEN M S, CHEN H X, *et al.* Multi-dimensional vector matrix theory and its application in color image coding[J]. The Imaging Science Journal, 2010.58(3): 171-176.

#### 作者简介:



孙文邦 (1976-), 男, 安徽怀宁人, 博士, 空军航空大学特种专业系讲师, 主要研究方向为视频压缩、图像处理、图像解译等。



唐海燕 (1973-), 女, 吉林长春人, 硕士, 空军航空大学航空理论系讲师, 主要研究方向为空战战术、信号处理等。

孙文斌 (1972-), 男, 安徽怀宁人, 安徽工业大学数理学院副教授, 主要研究方向为光学信息处理、物理化学分析、图像处理等。

程红 (1969-), 女, 吉林长春人, 博士, 空军航空大学特种专业系教授、硕士生导师, 主要研究方向为图像处理、图像解译等。